Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât g este monotonă şi surjectivă şi

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că f este continuă şi că există $x_0 \in [0,1]$, cu $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Arătaţi că mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = g(x)$ este un interval închis.

Problema 2. Fie n şi k două numere naturale astfel încât $n \geq 2$ şi $1 \leq k \leq n-1$. Arătaţi că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are exact k minori nuli de ordin $n-1$, atunci $\det(A) \neq 0$.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$. Arătaţi că

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6\det(A) + 6\det(B).$$

Problema 4. Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^2) = f(x)$ pentru orice $x \in [0,\infty)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.